Université de TOURS - L1 Gestion
Cours Outils mathématiques d'aide à la décision
Enoncé du TD n° 8 - groupe 127
Petits problèmes à transformer (à modéliser) et à résoudre
Automne 2023

Ce TD regroupe des petits problèmes, qui, parfois nécessitent de définir puis de résoudre un programme optimal, même qd ce dernier n'est pas mentionné. La Gestion est par excellence la science de l'optimisation, et de l'analyse des contraintes, même quand ces dernières ne sont pas toujours bien formulées.

Quand on recherche une variable qui est résultat de l'optimisation d'un agent, il faut commencer par bien définir ce qui a été optimisé par l'agent (la variable que l'on recherche, mais peut-être d'autres variables qu'il faut considérer en même temps). Cette première phase nécessite une vrai reflexion, et une modélisation des choix considérés.	Un programme d'optimisation peut se présenter au premier abord avec une contrainte écrite sous forme d'égalité. Il conviendra souvent d'écrire un programme équivalent avec la même contrainte, écrite sous forme d'inégalité. On fait cela en introduisant le signe $\geq$ ou $\leq$ à la place du signe $=$, en recherchant le cas dans lequel la contrainte «s'oppose» à l'objectif, et devra donc être saturée à l'optimum.	Méthode : quand on résoud ce type de problème, il est utile de commencer à voir les éléments essentiels sur le brouillon, de trouver la solution, puis, ensuite de rédiger, en fonction du chemin parcouru jusqu'à la solution.

1 Huit petits problèmes

Pour chacun de ces problèmes, on définira les variables, les contraintes, l'objectif, on écrira le programme optimal, et quand la contrainte se présente comme une égalité, on écrira, si c'est possible, la version du programme où la contrainte se présente comme une inégalité qui sera saturée à l'optimum) et on le résoudra, jusqu'à trouver la solution. On se tiendra à l'encadré fourni pour la rédaction, en allant à l'essentiel. La correction sera plus longue, développant le détail, puis proposant une rédaction concise, précise et juste.

1) Trouver deux nombres dont la somme vaut 12 et dont le produit est le plus grand possible.

2) Trouver deux nombres positifs dont la multiplication vaut 36 et dont la somme est la plus petite possible

3) Une firme a adopté la technologie $q = LK$. Quel est son coût pour produire 4 unités de bien, sachant que le prix de tous les facteurs de production sont égaux à 1 ?

4) Trouver trois nombres dont la somme vaut 8 et dont le produit est le plus grand possible

5) Calculer la quantité produite par un monopole, étant donné qu'il fait face à une demande $q = 2 - p$ et que sont coût marginal constant est égal à 1.

6) Calculer la quantité produite par une firme en concurrence pure et parfaite, étant donné qu'elle fait face à une demande $q = 2 - p$ et que sont coût marginal constant est égal au prix de vente du bien, à 1.

7) Comment se coordonnent deux firmes qui ont une quantité 99 à produire, sachant que le coût de la première est $C_1(q_1) = {q_1}^2$ et que le coût de la seconde est $C_2(q_2) = 2q_2^2$.

8) Comment se coordonnent deux firmes qui ont une quantité 99 à produire, sachant que le coût (positif) de chacune des firmes est une fonction croissante convexe, de coût marginal (strictement) positif, et que $C_2(q) = 2C_1(q)$. Vérifier qu'on emploie toujours les deux firmes et que $q_2 < q_1$.

9) Les auteurs touchent généralement des droits sur leurs livres, et ces droits sont généralement égaux à une fraction donnée (r) des ventes de leurs livres. Les auteurs et les éditeurs seraient-ils mieux lotis si les droits étaient un pourcentage fixe des bénéfices sur un livre ? On étudiera cette question sous l'hypothèse (très simplificatrice) de la fonction de production de livre suivante, dans un environnement concurrentiel : Un éditeur produit q, il vend tout ce qu'il produit au prix p, son coût pour produire le livre est $C(q)$, fonction convexe, et il donne à l'auteur la somme r pour chaque livre, cad le montant rq. On étudiera donc le choix de production de l'éditeur sous cette hypothèse. Après ce premier travail, vous étudierez le facteur de production quand l'éditeur ne doit pas prendre en compte ce qu'il donne à l'auteur pour le choix de sa production, mais qu'il donnera après sa décision prise une fraction α de son profit. Vous étudierez très attentivement comment le programme de l'éditeur se modifie, il est utile de représenter les deux décisions de l'éditeur dans un graphique q, p dans lequel on aura représenté le coût marginal croissant $C'(q)$. On pourra chercher à démontrer que le premier mode de rémunération conduit à une production de moins de livres.

10) Vous devenez gérant d'une firme produisant un bien homogène, de technologie $q = \sqrt{\ell}$, qui, dans un contexte concurrentiel avec p, le prix de vente et w, le salaire unitaire, produisait $q = \frac{p}{2w}$ pour maximiser son profit $\pi = pq - w\ell$. Vous décidez de poursuivre un autre objectif : « Maximiser le nombre de salariés ». Est-ce que cela a un impact sur la production. Si oui comment. Donnez tous les détails [Hint : démontrer qu'alors $\pi = 0$]

11) On considère un marché en concurrence qui produit un bien homogène selon la technologie $Q = \sqrt{L}$ où L est le nombre de travailleurs *qualifiés*. On suppose que le nombre de personnes qualifiées pour ce secteur, dans le pays est L. Montrer, quand le prix de vente est faible, que la fuite d'une partie de ces travailleurs qualifiés à l'étranger n'a pas d'impact sur la production. Préciser ce que signifie p est faible dans ce contexte. Interpréter.

12) Une firme a adopté la technologie $q = L^{1/4}K^{1/4}$. Quel est son coût pour produire q unités de bien, sachant que le prix de tous les facteurs de production sont égaux à 1 ?

13) Vous êtes le propriétaire-gérant d'une firme en CPP qui produit un bien homogène, au prix $C(q)$. Vous gérez votre entreprise depuis longtemps, votre revenu, ce sont les bénéfices de la firme, et vous songez à vous adjoindre les services d'un directeur général. Quel est, pour vous, le meilleur mode de rémunération : en lui offrant un salaire W qui impacte directement les coûts (passant à $C(q) + W$, où en lui offrant une participation aux bénéfices, $\alpha < 1$, calculée de façon à ce qu'il obtienne W (qui est le salaire de marché d'un tel directeur général) ?

14) Un monopole a deux stratégies possibles. Soit ne produire qu'un seul bien en quantité q_1 dont la demande est $q_1 = 40 - 2p_1$ soit produire ce même bien dont la demande ne change pas, en produisant en même temps un autre bien, partiellement substitut, qu'il demeurerait le seul à produire, dont la demande est : $q_2 = 40 - 2p_2 - \frac{1}{2}q_1$, la demande du second bien étant impactée par le nombre du premier bien sur le marché. On suppose le coût de production unitaire constant égal à $c < 20$ pour les deux chaines de production. Montrer que s'il décide de produire les deux biens, alors il produira moins du bien1. Montrer que ce monopole a toujours intérêt à produire de ce deux biens. Précisez le résultat. Interpréter. (L'étudiant pourra s'il le préfère écrire $c = 10$)

Fin du sujet du TD n° 8 - groupe 127