La théorie du producteur

Marianne Tenand

Microéconomie 1 - Département d'économie ENS

2016 - 2017

Plan du cours

Questions posées

- La théorie du producteur en microéconomie vise à répondre à certaines questions relatives à la production de biens et de services :
  - Quels biens et services sont nécessaires à la production ?
  - Quelles quantités de biens et de services peuvent être produites à partir d'une quantité donnée d'autres biens et services ?
  - Comment est organisé le processus de production ?
  - Comment produire *efficacement* ?

  → En résumé : *que* fait une firme et *comment* le fait-elle?
- En revanche, elle ne répond <u>pas</u> à certaines questions, tout aussi importantes :
  - Qui possède l'entreprise ? Sous quelles formes juridiques ?
  - Qui gère une entreprise au quotidien ?
  - Quelles relations contractuelles unissent les différents acteurs du processus de production ?

  → Disciplines complémentaires : gestion, sociologie des organisations, management, etc.

Éléments de réponse

- Réponse générale à la question analysée par la théorie du producteur :
  - Une firme produit des biens ou services (les **extrants**, ou **outputs**) destinés à être consommés ou utilisés par d'autres entreprises ;
  - Pour cela, elle utilise des moyens ou facteurs de production (appelés **intrants**, ou **inputs**)
  - Le processus de transformation des inptus en outputs est appelé **processus de production**
    - Critique adressée à la microéconomie : le processus de production est considéré comme une boîte noire
- De la théorie du producteur (individuel) on dérive l'analyse de l'**offre de marché**
  - Agrégation de l'offre d'une entreprise, qui résulte d'une décision individuelle
  - Pas nécessairement simple !

Motivations concrètes

- **Exemple : entreprise Peugeot**, secteur automobile :
  - Quel nombre de machines et d'ouvriers le constructeur doit-il prévoir dans les chaînes d'assemblage de son usine ?
  - Est-il efficace de produire la 306 et la 406 dans une même usine, ou vaut-il mieux dédier un site de production à chaque modèle?
  - Si Peugeot décide d'augmenter la production, va-t-elle embaucher davantage de salariés ? Installer de nouvelles machines ? Ouvrir un nouveau site de production ?
  - Quels sont les coûts prévisionnels pour le volume de production cible ? Comment ces coûts sont-ils susceptibles d'évoluer, notamment avec l'évolution du volume de production ?
    - Autre question cruciale : comment Peugeot va choisir ces lieux de production? $\rightarrow$ question relevant de l'économie géographique et de la théorie du commerce international
- Questions qui s'appliquent à **toute entité qui produit des biens et des services**:
  - Administrations publiques
  - Organismes à but non lucratif
  - Ménages (ouputs : production domestique, enfants, etc.)

Hypothèses de travail

Dans l'analyse néoclassique, l'entrepreneur peut être vu comme le symétrique du consommateur

- Le producteur est supposé **rationnel** avec un comportement de **maximisation sous contrainte** définissant sa position d'**équilibre** ($\rightarrow$ programme de production optimale)
- Sa fonction objectif est le **profit**
- La maximisation du profit est soumise, entre autres, à une contrainte technique, appelée **fonction de production**

Plan du cours

Plan du cours

Vecteurs de production

On s'intéresse à une économie à n biens.

- **Def :** On appelle **vecteur de production** (ou vecteur intrant-extrant, vecteur input-output) le vecteur $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ qui décrit l'output net résultant d'un processus de production donné.
  - Lorsque y_j est **positif** : le j-ème bien est un **output**, c'est-à-dire qu'il est *produit* par le processus de production que l'on étudie
  - Lorsque y_j est **négatif** : le bien en question est *consommé* dans le processus de production: c'est un **moyen ou facteur de production**
- Les inputs peuvent se ranger en trois catégories :
  - Les consommations intermédiaires
  - Le **facteur capital**
  - Le **facteur travail** ($\rightarrow$ analyse de la *demande de travail*)

L'ensemble de production

- Pour une firme donnée, dans l'économie considérée, il n'est pas possible de réaliser n'importe quel vecteur de production
  - Contraintes techniques
  - Dans la réalité, également des contraintes juridiques, institutionnelles, des normes sociales, etc.

- **Def :** Pour une firme donnée, l'ensemble des vecteurs de production **réalisables** correspond à l'**ensemble de production**, que l'on note $Y \subset \mathbb{R}^n$.
  - Tout $y \in Y$ est réalisable, et tout $y \notin Y$ n'est pas réalisable
  - *Pourquoi un vecteur appartenant à l'ensemble* $\mathbb{R}_0^{+n} = \{y \in \mathbb{R}^n : y > 0\}$ *n'est pas réalisable ?*

L'ensemble de production : propriétés

Soit Y l'ensemble de production associé à une entreprise. Alors les propriétés suivantes *peuvent* être vérifiées :

- L'ensemble de production est non-vide : $Y \neq \{\emptyset\}$
- Il est toujours possible de ne rien produire et de ne consommer aucun intrant : $0 \in Y$
- On ne peut pas produire sans moyen de production : $\mathbb{R}_0^{+n} \notin Y$
- Si deux vecteurs de production sont réalisables, alors leur somme est également réalisable (si **additivité** au niveau d'une firme ou **libre entrée** au niveau de l'industrie) : $y \in Y, y' \in Y \Rightarrow y + y' \in Y$
- On peut toujours produire moins des mêmes outputs en utilisant plus des mêmes facteurs de production : $y \in Y, y' \leq y \Rightarrow y' \in Y$
- Y est un ensemble **convexe**
- Y est une ensemble **fermé** (il comprend sa frontière)

Attention : Ces propriétés sont souvent respectées, mais ne le sont pas toutes nécessairement (selon les hypothèses)

La frontière de transformation

- **Def :** On appelle la **fonction de transformation** la fonction $F : y \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) \leq 0\}$$

- **Def :** On appelle **frontière de transformation** (FT) l'ensemble des vecteurs de productions "à la frontière" de l'ensemble de production :

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = 0\}$$

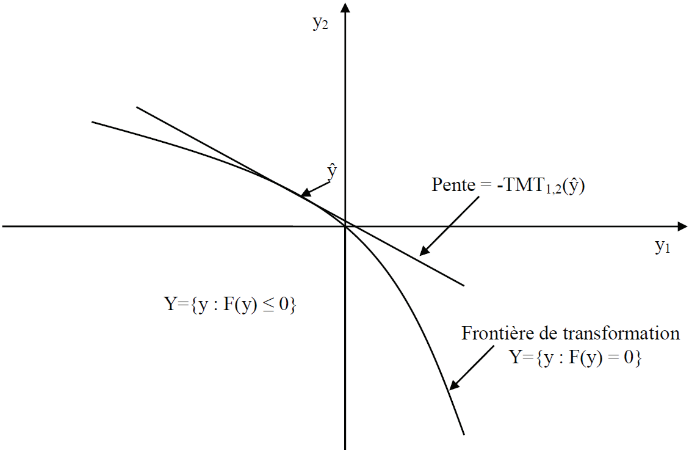
  - La FT correspond à l'ensemble des points pour lesquels il n'est pas possible d'accroître un output sans accroître simultanément un input ou diminuer simultanément un ou plusieurs autres outputs ;
  - La FT peut aussi se voir comme l'ensemble des points pour lesquels il n'est pas possible de réduire un input sans diminuer dans le même temps un ou plusieurs outputs, ou accroître au autre input.

  - NB: on raisonne à processus ou technologie de production donné(e)

L'efficience

- **Def :** On dit que le vecteur de production $y' \in Y$ est **efficient** si et seulement s'il appartient à la frontière de transformation.
  - On peut noter E l'ensemble des vecteurs de production efficients (au vu du processus de production donné)
  - Logiquement, E désigne également la frontière de trasnformation
- Illustration ▸ Graphique

Figure 1: Ensemble de production et frontière de transformation



SOURCE : Mathias Lé (2013), *Fondements de théorie microéconomique*

Le taux marginal de transformation

- **Def :** Si $F(.)$ est différentiable, et si le vecteur $\bar{y}$ se situe sur la frontière de transformation ($\bar{y} \in E$) alors, pour toute paire de biens i et j, on appelle **taux marginal de transformation (TMT)** du bien i par le bien j évalué en $\bar{y}$ le ratio :

$$TMT_{i,j}(\bar{y}) = \frac{\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_i}}{\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_j}}$$

  - Le TMT indique de combien il est possible d'*augmenter* l'ouput <u>net</u> du bien j si on *réduit* l'output <u>net</u> du bien i tout en restant sur la frontière de transformation
  - Pour le voir, on peut utiliser la différentielle totale de la fonction $F(.)$, évaluée en $\bar{y}$:

$$\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j = \mathrm{d}F(\bar{y}) = 0$$

- Analogie avec le TMS de la théorie du consommateur : le TMT se lit comme l'inverse de la pente de la tangente à la frontière de transformation (au point $\bar{y}$)

Quelques simplifications

- Analogie avec théorie du consommateur : pas parfaite !
  - Programme du consommateur : fonction $U : \mathbb{R}^{+n} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$
  - Programme du producteur : fonction $F : \mathbb{R}^{m} \rightarrow \mathbb{R}^{m}$
    - NB : q_j : à la fois les variables de la fonction-objectif et les valeurs qu'elle prend
- Pour une meilleure lisibilité, on préfère distinguer les **outputs** des **inputs**
  - Soit $q = (q_1, ..., q_m)$ avec $q \geq 0$ le vecteur des m outputs du processus de production
  - Soit $z = (z_1, ..., z_{n-m})$ avec $z \geq 0$ le vecteur des $n - m$ facteurs de production utilisés dans le processus de production

    $\rightarrow$ on peut réécrire : $y = (-z_1, ..., -z_{n-m}, q_1, ..., q_n)$

La fonction de production

- Simplification : on considère généralement le cas où il y a **un seul output**
  - $m = 1 \implies q \in \mathbb{R}^+$
- **Def :** La fonction $f : \mathbb{R}^{(n-1)+} \mapsto \mathbb{R}^+$ définie par $f(z) = q$ est appelée la **fonction de production** de l'entreprise.
  - Elle indique la *quantité maximale* que l'entreprise peut produire en utilisant ses $(n-1)$ inputs en quantités $(z_1, ..., z_{n-1})$.
  - La fonction de production décrit la manière dont peuvent être combinés les différents inputs pour donner un niveau de production q
    - Pour arriver à un certain niveau de production, plusieurs manières possibles (on peut utiliser $+/-$ de travail, de capital, etc.)
  - La fonction de production permet également de caractériser la frontière de transformation de l'ensemble Y

Le TMST

- **Def :** On définit le **Taux marginal de substitution technique** (TMST) de l'input i par l'input j évalué au point $\bar{z}$ comme:

$$TMST_{i,j}(\bar{z}) = -\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}z_i}\bigg|_{f(\bar{z})=\bar{q}} = \frac{\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_i}}{\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_j}}$$

  - Le TMST indique la quantité d'input j *supplémentaire* qui doit être utilisée pour garder le niveau d'ouptut constant au niveau $\bar{q} = f(\bar{z})$ lorsque la quantité d'input i est *réduite*
    - *Pouvez-vous le retrouver avec la différentielle de la fonction de production?*
  - Le TMST : un cas particulier du TMT
- le TMST traduit la notion de la **substituabilité** des facteurs
  - Cette idée n'est pas présente à l'origine dans la théorie du producteur (Walras parlait de "coefficients de fabrication" fixes)
  - Puis **loi des rendements décroissants** par les néoclassiques

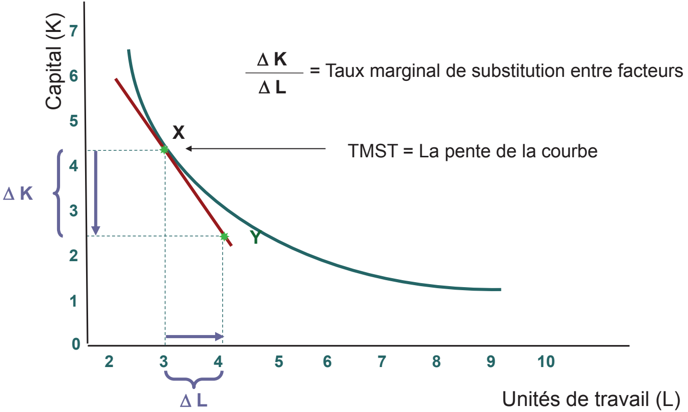
Les isoquantes

- **Def :** on appelle **isoquante de niveau** q l'ensemble des inputs tel que le vecteur de production associé au niveau de production q appartient à l'ensemble de production:

$$I(q) = \{z \in \mathbb{R}^{(n-1)+} : f(z) = q\}$$

- L'isoquante de niveau q décrit toutes les combinaisons d'inputs permettant de produire une quantité donnée d'output de manière **efficace**
  - Analogie avec la courbe d'indifférence de niveau u
  - Lien entre TM(S)T et pente de l'isoquante? Graphique

Figure 2: Isoquantes et TMST associés à une fonction de production à deux inputs et un input



SOURCE : Cours donné à l'IEP Paris

Productivités marginale et moyenne

- **Def :** On définit la **productivité moyenne** par rapport à l'input i évaluée au point $\overline{z}$ comme :

$$PM_i = \frac{f(\overline{z})}{\overline{z_i}} = \frac{\overline{q}}{\overline{z_i}}$$

  - La PM_i mesure la quantité d'output q produite par unité de d'input z_i
  - Ex : productivité moyenne du travail

- **Def :** On définit **productivité marginale** de l'input i évaluée au point $\overline{z}$ comme :

$$Pm_i = \frac{\partial f(\overline{z})}{\partial z_i}$$

  - La Pm_i mesure le supplément d'output q induit par l'utilisation d'une unité supplémentaire d'ouput i, sans que ne soient modifiées les quantités des autres inputs
  - Ex : productivité marginale du travail

La loi des rendements marginaux décroissants

- Hypothèse classique : la **productivité marginale des facteurs de production est décroissante**

$$\frac{\partial^2 f(\overline{z})}{\partial z_i^2} < 0$$

- **Loi des rendements marginaux décroissants**
  - Application au XVIIème siècle : l'augmentation de la quantité de travail employé sur un lopin de terre donné produit des incréments de récolte de plus en plus faibles
  - En diminuant, la productivité marginale du travail finit par faire diminuer la productivité moyenne du travail, soit la quantité de denrées produites par travailleur
  - Pensée malthuséenne : famine inéluctable

Hypothèses et propriétés

- **Théorème d'Euler :** Si la fonction de production f est différentiable et homogène de degré k, alors on a:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} z_i = k \times f(z)$$

  - Application: pour une fonction de production Cobb-Douglas :

$$f(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

    qui est homgène de degré 1, on a :

$$Pm_K K + Pm_L L = f(K, L)$$

    $\rightarrow$ règle dite de l'épuisement du produit

Rendements d'échelle *vs* rendements marginaux

- Loi des rendements marginaux décroissants : décrit comment la production évolue lorsqu'on fait varier *un seul* facteur de production, l'autre restant utilisé en quantité inchangée

- Une entreprise peut également choisir d'augmenter sa production en augmentant la quantité de *tous* ses facteurs de production

  → Comment décrire la manière dont évolue la production quand les quantités de **tous les inputs** varient ?

- Notions de **rendements d'échelle**
  - A bien distinguer des rendements marginaux (aussi dits *factoriels*)
  - Processus ou technologie de production *inchangé(e)*

Rendements d'échelle : définition

- **Def :** Soit un ensemble de production Y et une fonction de production f définie sur cet ensemble. On dit que la fonction de production exhibe des **rendements d'échelle** :
  - **constants** ssi :
  $$\forall z \in Y, \forall \lambda > 1, f(\lambda z) = \lambda f(z)$$
  - **croissants** ssi :
  $$\forall z \in Y, \forall \lambda > 1, f(\lambda z) \geq \lambda f(z)$$
  - **décroissants** ssi :
  $$\forall z \in Y, \forall \lambda > 1, f(\lambda z) \leq \lambda f(z)$$
- Qu'est-ce que cela veut dire en termes d'*homogénéité de la fonction de production f* ?

L'élasticité de substitution technique entre facteurs de production (1)

- **Def** : on définit l'**élasticité de substitution technique entre les facteurs de production**, notée σ, comme le rapport de la variation relative des quantités de facteurs utilisés dans le processus de production sur la variation relative du TMST (en un point donné).
  - Dans le cas où on a du facteur travail et du facteur capital :

$$\sigma_{L,K} = \frac{\mathrm{d}(L/K)}{(L/K)} \cdot \frac{TMST_{L,K}(L,K)}{\mathrm{d}TMST_{L,K}(L,K)}$$
$$= \frac{\mathrm{d}ln(L/K)}{\mathrm{d}lnTMST}$$

- L'élasticité de substitution des facteurs de production mesure la *courbure* de l'isoquante : l'élasticité de substitution nous dit de quelle ampleur le ratio des facteurs utilisés dans le processus de production varie lorsque la pente de l'isoquante varie.

L'élasticité de substitution technique entre facteurs de production (2)

- Plus σ est élevée, plus les possibilités de substitution entre les facteurs sont grandes
  - $\sigma = 0$ dans le cas d'une fonction de production Leontief : les inputs sont des **compléments parfaits**
  - $\sigma = \infty$ dans le cas d'une fonction de production linéaire : les inputs sont des **substituts parfaits**
  - $\sigma = 1$: on parle d'**élasticité de substitution unitaire**
- La **fonction de production Cobb-Douglas** a beaucoup été utilisée en macroéconomie car elle permet de représenter le fonctionnement agrégé d'une économie dans lesquels le facteur travail et le facteur capital sont substituables, mais pas parfaitement
  - Réalité empirique

Elasticités de substitution : deux autres concepts dans la thé

1. Un second concept d'élasticité de **substitution "technique"** :

$$\epsilon_{L,K} = - \frac{\frac{dL}{L}}{\frac{dK}{K}} \Bigg|_{F(K,L)=q}$$

- Variation en % dans la quantité de facteur travail qui permet de maintenir inchangé l'output lorsqu'on augmente de 1 % la quantité de facteur capital utilisée dans le processus

2. Un concept d'élasticité de **substitution "non technique"** :

$$\tilde{\sigma}_{L,K} = - \frac{\frac{d(K^*/L^*)}{(K^*/L^*)}}{\frac{d(w/r)}{(w/r)}}$$

- Variation en % dans la quantité relative de facteurs qui va être utilisée à l'optimum induite par une variation de 1 % dans le prix relatif des facteurs de production
- Préalable : résolution du problème d'optimisation du producteur

Plan du cours

Les coûts de production

- Pour produire une quantité donnée d'output, l'entreprise doit (généralement) *payer les facteurs de production* qu'elle utilise dans son processus de production
- Ce sont à la fois les **prix des facteurs de production** et la **technologie de production** utilisée qui déterminent les **coûts de production** de l'entreprise
- **Def :** On appelle **fonction de coût** la fonction $C(.)$ qui, pour un vecteur w des prix des facteurs, associe le coût des inputs utilisés dans le processus de production à la production d'une quantité d'output donnée :

$$C(w, y) = w.z$$

  - NB : Pour $f(.)$ donnée, et z va dépendre de y (fixé)
- Le coût de production peut également être écrit comme une fonction des quantités de facteurs utilisées. Par exemple :

$$C(L, K) = wL + rK$$

où w désigne le salaire (superbrut, ou coût du travail) et r la rémunération du capital (le taux d'intérêt)

Coût moyen et coût marginal

- **Def :** le **coût moyen** CM est le coût total associé à la production d'une quantité d'output y divisé par le niveau de production. Il représente le coût par unité produite, ou encore le **coût de production unitaire**

$$CM(y) = \frac{C(y)}{y}$$

- **Def :** le **coût marginal** Cm est l'accroissement du coût induit par la production d'une unité d'output supplémentaire

$$Cm(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y}$$

- NB : on omet généralement les prix des facteurs w dans les fonctions de coûts lorsqu'ils sont implicitement considérés comme fixées à un certain niveau.

Le raisonnement au coût marginal

- De manière analogue à la théorie du consommateur, la théorie du producteur repose sur un **raisonnement au coût marginal**
- Exemple : soit une entreprise avec deux sites de production. Son objectif de production est $Q = 43$. Chacun des deux sites à sa propre technologie de production, caractérisés par les coûts de production suivants :

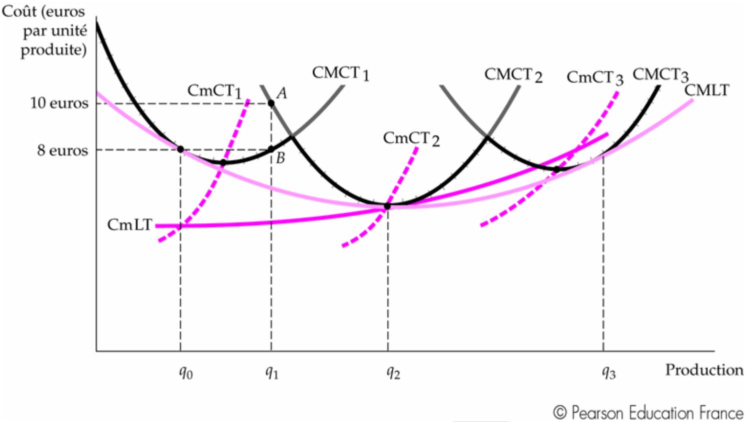
$$\begin{cases} CT_1(Q_1) = 4Q_1 + 5Q_1^2 \\ CT_2(Q_2) = 2Q_2^2 \end{cases}$$

  - Quel est le site où la production est la plus efficace ?
  - Comment l'entreprise va-t-elle décider d'allouer sa production entre les deux sites ?

Fonctions de coûts de court terme *vs* coûts de long terme

- Les fonctions de coûts peuvent représenter des coûts:
  - de **court terme** : évolution des coûts quand **le(s) facteur(s) variable(s) augmente(nt)** mais que la quantité d'un facteur au moins reste constante ;
  - de **long terme** : évolution des coûts quand la quantité de **tous les facteurs** augmente
- Augmenter plusieurs (tous les) facteurs de production permet de minimiser le coût de production total pour atteindre un niveau de production donné ▸ Graphique
- En général on considère que le capital est le facteur fixe à court terme, et le travail le facteur variable
  - Augmenter la quantité de travail peut se faire par la réalisation d'heures supplémentaires
  - Augmenter la quantité de capital nécessite des investissements

Figure 3: Relations entre les fonctions de coûts de court terme et de long terme



Source : Pyndick, *Microeconomics, 7ème édition*, Pearson Education

Retour

Coûts fixes

- **Def :** On parle de **coûts fixes** lorsque pour produire une quantité *strictement positive* d'output, il faut supporter un certain coût, CF, de même niveau quelle que soit la quantité produite.
- Mathématiquement, la fonction de coût exhibe un coût fixe lorsque :

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to 0} C(y) > 0 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

  - Ex : coût de l'abonnement EDF, équipements de production pouvant être facilement revendus sur un marché de l'occasion

Coûts irrécupérables

- **Def :** On parle de **coûts irrécupérables** lorsque le processus de production est tel que, même si l'entreprise décide de produire une quantité nulle, elle devra supporter un certain coût positif
- La fonction de coût exhibe un "sunk cost" lorsque :

$$C(0) > 0$$

  - Ex : dépenses de marketing et de R&D, formations payées aux employés, etc.
- Le raisonnement à la marge est mis à mal par la *sunk cost fallacy*
  - Si **aversion à la perte** : l'agent de na pas pouvoir ignorer les coûts irrécupérables engagés
  - Implications pour l'analyse des structures de marché (concurrence), notamment pour la théorie des marchés contestables

Exemples de fonction de coût

- On considère une firme ayant la fonction de coût suivante:

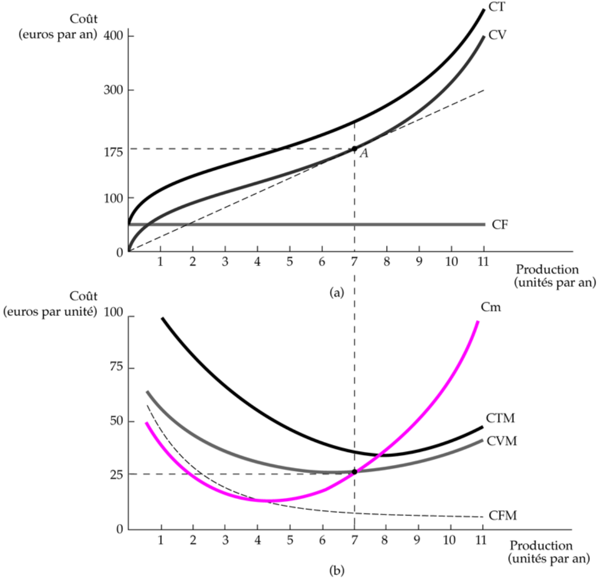
$$\begin{cases} C(y) = y^3 + 1 \quad \text{si} \quad y > 0 \\ C(y) = 0 \quad \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

  Est-on en présence d'un coût fixe ? D'un coût irrécupérable ?

- Même question avec la fonction de coût suivante :

$$\{ \; C(y) = 4y + 7$$

Figure 4: Relations entre les fonctions de coûts



Source : Pyndick, *Microeconomics, 7ème édition*, Pearson Education

Plan du cours

Les décisions du producteur

- Connaissance de la fonction de production ou, alternativement, connaissance des coûts minimaux associés à chaque niveau de production
- Hypothèse sur le **comportement du producteur** :
  - Maximise son profit
  - Minimise son coût de production
- Les **variables de décision** :
  - le niveau de production
  - les quantités de facteur utilisées

$\Rightarrow$ Analyse de la **décision du producteur**

- Analyse au niveau **individuel** :
  - Demandes de travail et de capital *de l'entreprise*
- Analyse au niveau de l'**industrie** :
  - Demandes de travail et de capital *du marché*
    $\rightarrow$ agrégation et interactions entre producteurs (pour plus tard)

La maximisation du profit

- **Def :** Etant donné un vecteur d'inputs z, un vecteur d'output q, un vecteur $p_z > 0$ représentant le prix des inputs, un vecteur $p_q > 0$ représentant le prix des outputs, le **profit** associé à la production du vecteur q est égal à :

$$\pi(p) = p_q q - p_z z$$

avec $p = (p_q, p_z)$

- **Def :** Le **programme de maximisation du profit** (PMP) du producteur s'écrit :

$$\max_{z} \quad \pi(p)$$
$$\text{s.c.} \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad f(z) = q$$

  - L'écriture du cible de niveau de production comme une égalité et non comme une égalité vient de la contrainte d'efficience

La maximisation du profit : résolution analytique

- Hypothèse cruciale faite ici : l'entreprise est *price-taker*
  - Une entreprise individuelle n'influence pas le prix auquel elle peut vendre son output
  - Implique que la **fonction de demande adressée à une entreprise individuelle** est de pente nulle dans le plan (q, p).
- Cette hypothèse sera relâchée quand on analysera des structures de marché à concurrence imparfaite
  - *Microéconomie 2* (S2)
- Hypothèse caractéristique de la situation de **Concurrence pure et parfaite**
  - Cette hypothèse tient-elle la route ?
  - S. Keen : incompatibilité logique dans l'articulation de l'analyse des décisions individuelles de l'entreprise et l'analyse de l'offre et de la demande agrégée
    - "L'infinitésimal n'est pas zéro"

La maximisation du profit : les CPO

- Comme il n'y a que des contraintes de non-négativité et que la contrainte technologique peut être intégrée à la fonction-objectif, le Lagrangien est égal à :

$$
\begin{aligned}
L(z,\mu) &= p_q q - p_z z + \mu . z \\
&= p_q f(z) - p_z z + \mu . z
\end{aligned}
$$

- Les CPO sont donc :

$$
\frac{\partial L(z^*,\mu^*)}{\partial z_i} = 0 \quad \forall \text{ input } i \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L(z^*,\mu^*)}{\partial \mu} \geq 0
$$

$$
\mu^* \geq 0 \qquad \text{et} \quad \mu^* . z^* = 0
$$

- Dans le cas de **solutions intérieures**, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(z^*,\mu^*)}{\partial z_i} = p_q \frac{\partial f(z^*)}{z_i^*} - p_{zi} = 0 \quad \forall i \\
p_q \frac{\partial f(z*)}{\partial z_i} = p_{zi} \quad \forall i
\end{aligned}
$$

- Le terme de gauche correspond à ce que *rapporte* une unité de facteur i de plus, et le terme de droite correspond à ce qu'elle *coûte*.

La maximisation du profit : solution

- **Def :** On appelle la **fonction de demande du facteur de production** la solution au problème de maximisation du profit, $z(p_z, p_q)$, qui est fonction des prix des inputs et des outputs.
- **Def :** On appelle la **fonction d'offre du producteur** la fonction qui pour tout vecteur de prix d'inputs et d'output donne le niveau de production atteint lorsque sont employés les niveaux d'inputs qui maximisent le profit :

$$y(p_z, p_q) = f(z(p_z, p_q))$$

- **Def :** On appelle **fonction de profit** la fonction qui associe à tout vecteur de prix des inputs et de l'output le profit maximum réalisé par l'entreprise :

$$\pi(p_z, p_q) = p.y(p_z, p_q) - p_z.z(p_z, p_q)$$

La minimisation du coût

- **Def :** le **programme de minimisation du coût** (PMC) associé à la production du vecteur q se définit comme :

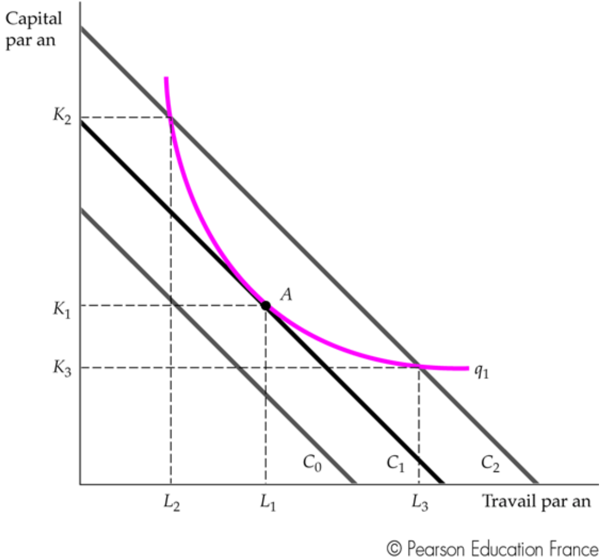
$$\min_{z} \quad p_z z$$
$$\text{s.c.} \quad f(z) \geq \overline{q} \quad \text{et} \quad z \geq 0$$

- La solution définit la **demande conditionnelle de facteurs de production**, $z^* = z(p_z, \overline{q})$
- La **fonction de coût** donne le coût minimum permettant d'atteindre le niveau de production désiré, pour tout vecteur de prix des inputs et niveau de production :

$$C(p_z, \overline{q}) = p_z.z(p_z, \overline{q})$$

  - Dans le cas où les facteurs de production sont le travail et le capital :
    - Demande de travail: $L_d^* = L_d(w, r, \overline{q})$
    - Demande de capital: $K_d^* = K_d(w, r, \overline{q})$
- On retrouve la **dualité** du problème de minimisation et du problème de maximisation

Figure 5: Résolution graphique du problème de minimisation du coût



Source : Pyndick, *Microeconomics, 7ème édition*, Pearson Education

Fonction de coûts et rendements d'échelle

- **Propriété :** Lorsque la fonction de production exhibe des rendements d'échelle constants alors la fonction de coût peut s'écrire :

$$C(p_z, \overline{q}) = \overline{q}.C(p_z, 1)$$

pour $\overline{q} > 0$

Démonstration par l'absurde

- **Lien entre rendements d'échelle et fonction de coût** :
  - Rendements d'échelle croissants $\iff$ $CM(w, y)$ décroissante en y
  - Rendements d'échelle décroissants $\iff$ $CM(w, y)$ croissante en y
  - Rendements d'échelle constants $\iff$ $CM(w, y)$ constante en y

avec $CM(w, y) = C(w, y)/y$ (fonction de coût moyen)

La minimisation du coût : résolution analytique

- Le Lagrangien associé au problème de minimisation du coût s'écrit :

$$L(p_z, \lambda, \mu) = p_z z + \lambda(\overline{q} - f(z)) + \mu.z$$

- Les CPO (Kuhn et Tucker) s'écrivent :

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad \forall \text{ input } i$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} \geq 0$$
$$\lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu \geq 0$$
$$\lambda(\overline{q} - f(z)) = 0 \quad \text{et} \quad \mu.z = 0$$

- Dans le cas où on a du facteur travail et du facteur capital (et une solution intérieure), les CPO donnent :

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f(L^*,K^*)}{\partial L}}{w} = \frac{\frac{\partial f(L^*,K^*)}{\partial K}}{r}$$
$$\iff \frac{w}{r} = \frac{\frac{\partial f(L^*,K^*)}{\partial L}}{\frac{\partial f(L^*,K^*)}{\partial K}} = TMST_{L,K}(L^*, K^*)$$

Fonctions de coûts et demandes conditionnelles : propriétés

- **Propriétés de la fonction de coût** $C(p_z, \overline{q})$:
  - La fonction de coût est croissante en p_z
  - La fonction de coût est homogène de degré 1 en p_z
  - La fonction de coût est strictement croissante en $\overline{q}$
  - **Lemme de Shepard** :

$$z_i(p_z, \overline{q}) = \frac{\partial C(p_z, \overline{q})}{\partial z_i}$$

- **Propriétés des fonctions de demande conditionnelle** $z_i(p_z, \overline{q})$:
  - La *matrice de substitution* est symétrique :

$$\frac{\partial z_j(p_z, \overline{q})}{\partial p_{zi}} = \frac{\partial z_i(p_z, \overline{q})}{\partial p_{zj}}$$

(cf. dérivées croisées secondes de la fonction de coût)

  - L'**effet-prix [de l'input] compensé** est négatif ou nul :

$$\frac{\partial z_i(p_z, \overline{q})}{\partial p_{zi}} \leq 0$$

PMC et fonction de coût de court terme

- En général, le PMC permet de dériver la fonction de coût de *long terme* puisque les arguments de la minimisation sont constitués de l'ensemble des facteurs de production.
- On peut toutefois trouver la fonction de coût de *court terme* en restreignant les arguments de la minimisation aux facteurs considérés comme variables à court terme.
  - La fonction de coût *de court terme* est obtenue en ajoutant une contrainte supplémentaire au problème de minimisation du coût ;
  - Logiquement, pour chaque niveau de production et chaque vecteur de prix des inputs, le coût de *court terme* (total et moyen) sera supérieur ou égal au coût de *long terme*.

Applications (1)

- **Fonction de production Cobb-Douglas**

$$y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

  - Que vaut l'élasticité de substitution technique $\sigma_{L,K}$ entre les facteurs de production dans le cas de la Cobb-Douglas?

- **Fonction de production à élasticité de substitution technique constante (CES)**

$$y = F(K, L) = (K^{\rho} + L^{\rho})^{1/\rho}$$

avec $1 \geq \rho > -\infty$

  - Que vaut l'élasticité de substitution technique entre le facteur travail et le facteur capital ?
  - Discuter de la substituabilité entre les facteurs de production en fonction de l'élasticité de substitution technique

Pourquoi la fonction Cobb-Douglas ?

Pourquoi fait-on généralement l'hypothèse qu'on peut représenter la fonction de production agrégée de l'économie par une Cobb-Douglas à rendements d'échelle constants ?

- **Propriétés de la Cobb-Douglas**
  - Si le facteur travail et le facteur capital sont rémunérés à leur productivité marginale (cf. CPO du PMP) alors lorsque le salaire augmente relativement à la rémunération du capital de 1 %, le ratio capital sur travail augmente de 1 %.

    $$\tilde{\sigma}_{L,K} = 1$$

  - Règle d'épuisement du produit (**théorème d'Euler**) : toute la production sert à rémunérer les facteurs de production :

    $$P_m L + P_m K = f(K, L)$$

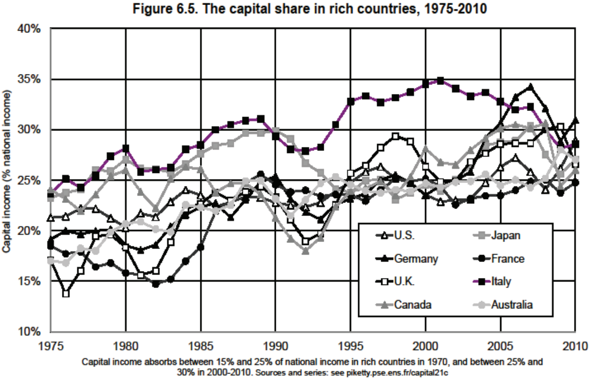
  - Le partage de la valeur ajoutée entre travail et capital est constant, et est indépendant des rémunérations (réelles) relatives des facteurs

    $$rK = \alpha Y \quad \text{et} \quad wL = (1-\alpha)Y$$

Pourquoi la fonction Cobb-Douglas (2) ?

- **Cohérence avec les faits empiriques**
  - Relative constance de la part du capital dans la valeur ajoutée sur longue période (1920 - 1990)
    - α vaut entre 0,25 et 0,33 selon les choix méthodologiques
  - Dans le même temps, multiplication des salaires (réels) par plus de 10, et forte augmentation par rapport à la rémunération (réelle) du capital
  - Références :
    - T. Piketty : *Economie des inégalités*, 1997, *Le capital au XXIe siècle*, 2014, en particulier le chapitre 6 ; cours M1-M2 APE/PPD
    - P. Askenazy et al. (*Le partage de la valeur ajoutée*, 2011)
    - Brefs *Compléments*

Faits stylisés : l'évolution de la part capital dans la valeur ajoutée



SOURCE : T. Piketty (2014), *Le capital au XXIe siècle*

Pourquoi la fonction Cobb-Douglas (3) ?

Critiques

- Estimations micro et macro de l'élasticité de substitution (non technique) entre les facteurs, qui devrait être unitaire, donnent des valeurs significativement différentes
  - Et pour la plupart différentes de 1...

    $\rightarrow$ Pb d'agrégation micro-macro ?

    $\rightarrow$ Rejet de la forme Cobb-Douglas ?

- Part du capital dans la valeur ajoutée a eu tendance à augmenter au cours des deux dernières décennies
  - Implique une élasticité de substitution (non technique) supérieure à 1
  - T. Piketty : supposer une fonction de production agrégée est une CES avec élasticité même légèrement supérieure à 1 permet de mieux rendre compte de l'augmentation récente de la part du capital dans la valeur ajoutée lorsque le ratio K/L augmente
    - Annexes techniques au chapitre 6 du *Capital au XXIe siècle*)