# Statistiques appliquées Licence 3

Interrogation écrite no.1

4 novembre 2013

*Toutes les réponses doivent être justifiées. L'usage de la calculatrice et de la table statistique est autorisé. La durée de l'épreuve est de 1h30.*

## Questions de cours

1. On vous affirme que si deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $Cov(X; X+Y) = Var(X)$. Est-ce exact ? Et la réciproque ?
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes et $a$ et $b$ deux constantes $\in \mathbf{R}$. Simplifier les expressions suivantes. :
   $Var(aX - bY) =?$

## Exercice 1

Norbert de *Stats Chef* souhaite reproduire un plat de Cyril Lignac qui l'a rendu célèbre. Il dispose de plusieurs plats à sa disposition mais n'est pas en mesure de déterminer lequel est de Cyril Lignac. Un statisticien lui donne néanmoins les informations suivantes :

– 3% des plats sont fait par Cyril Lignac. On notera cet évènement $L$.

Les plats de Cyril Lignac ont trois particularités. En particulier :

– 15 % des plats sont croquants mais 60% des plats de Cyril Lignac sont croquants.
– 9% des plats sont gourmands mais 78% des plats de Cyril Lignac sont gourmands.
– 40% des plats sont piquants mais seulement 70% de Cyril Lignac sont piquants.

Norbert souhaite identifier un plat de Cyril Lignac qui soit croquant, gourmand mais **pas** piquant. En faisant l'hypothèse que les particularités des plats sont indépendants, quelle est la probabilité que Norbert authentifie un plat de Cyril Lignac ?

[1]

1. N'oubliez pas de tourner la page !

# Exercice 2

Dans un univers fort lointain, dans une classe de 40 élèves, votre chargé de TD de statistiques trouve que vos notes sont distribuées de manière uniforme entre 0 et 20.

1. Notons $X_i$ la note de l'élève $i$. Quelle est l'espérance et la variance de $X_i$ ? Quelle est la distribution approximative de la moyenne de ces notes ?
2. D'un naturel généreux, votre chargé de TD souhaite rehausser les notes de $B$ pour que la probabilité que la moyenne plus ce $B$ soit supérieure à 12 soit de 95%. Quelle est la valeur de $B$ ?

# Exercice 3

Soit $(X_i)_{i \in N}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli de même paramètre $p$ et indépendantes deux à deux : $X_i \to B(1, p)$ indépendamment et identiquement distribuées.
Pour rappel, une variable aléatoire de Bernouilli :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ avec une probabilité p} \\ 0 \text{ avec une probabilité 1-p} \end{cases}$$

On définit pour tout $i \in \mathbf{N}$ la variable aléatoire $Y_i = X_i.X_{i+1}$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $Y_i$ ?
2. Calculer $P(Y_i = 1)$. Quelle est la loi de $Y_i$ ? Déterminez son espérance et sa variance.
3. Soit
$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n} \tag{1}$$
4. Déterminer $E(S_n)$
5. Calculer $P(Y_i = 1 \ et \ Y_{i+1} = 1)$. Que peut-on dire des variables $Y_i$ et $Y_{i+1}$ ?
6. Peut-on écrire que $Var(S_n) = \frac{1}{n^2}(Var(Y_1) + Var(Y_2) + ...Var(Y_n))$ ? Justifier.
7. On admet que $Var(S_n) = \frac{p^2(1-p^2)}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}(p^3 - p^4)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$lim_{n \to +\infty} P(|S_n - p^2| > \varepsilon) = 0 \tag{2}$$